At Right Angles

A Resource for School Mathematics

अनुपात

पद्मप्रिया शिराली

Azim Premji University

A publication of Azim Premji University
together with Community Mathematics Centre,
Rishi Valley

परिचय

अनुपात जैसे विषय को आप कैसे प्रस्तुत करते हैं, जो दैनिक जीवन में इतने व्यापक रूप से मौजूद है और इन्सानों के अनुभवों के साथ इतनी घनिष्ठता से जुड़ा हुआ है? हमारे द्वारा संजोई गई सांस्कृतिक उपलब्धियाँ इससे अटी पड़ी हैं : संगीत अनुपात से परिपूर्ण है, वैसे ही जैसे कि कला। खाना पकाना और ख़रीददारी हमारे दैनिक जीवन का हिस्सा हैं और ये दोनों ही अनुपात के उपयोग से पूरी तरह भरे हुए हैं। परछाईं, जो दिन भर हमारे साथ मौजूद रहती है, क्रियाकलापों में अनुपात का एक दृश्य चित्रण प्रस्तुत करती है। एक विषय के रूप में, गणित में अनुपात की धारणा कई विषय-क्षेत्रों (topic) में अन्तर्निहित होती है—कभी-कभी स्पष्ट तरीक़े से, तो कभी-कभी अस्पष्ट तरीक़े से। भिन्न, स्केल ड्राइंग, आवर्धन (enlargement), त्रिकोणमिति, पहाड़े, रैखिक समीकरण… ये सभी अनुपात के उदाहरण हैं।

इस बात को ध्यान में रखते हुए कि अनुपात गणित की इतनी सारी अवधारणाओं से बुनियादी रूप से जुड़ा हुआ है, इस विषय को पढ़ाते समय एक मज़बूत नींव रखना और आवश्यक वैचारिक आधार विकसित करना महत्त्वपूर्ण है। अनुपात का अध्ययन करते समय अक्सर होने वाली एक मूल त्रुटि उस सन्दर्भ में *योज्य सोच* (additive thinking) को लागू करना है जिसके लिए *गुणात्मक सोच* (multiplicative thinking) की आवश्यकता होती है। यह एक ऐसी त्रुटि है जो बच्चे अनुपात के सवालों को हल करते समय अक्सर करते हैं। स्पष्ट है कि विभिन्न तरीक़ों से और विभिन्न उदाहरणों का उपयोग करके इस ओर बच्चों का ध्यान आकर्षित करने की आवश्यकता है, ताकि वे स्पष्ट रूप से यह देख सकें कि अनुपात और समानुपात गुणात्मक सम्बन्ध पर आधारित हैं।

अक्सर पाठ्यपुस्तकों में बच्चों का सामना जिन सवालों से होता है वे सीमित होते हैं और उनमें दोहराव होता है।

इसके अलावा, सवालों की पर्याप्त विविधता के प्रदर्शन में कमी बच्चों को विभिन्न सन्दर्भों में समानुपातिक स्थिति पर ध्यान देने से रोकती है। वे समानुपातिक और असमानुपातिक स्थितियों के बीच अन्तर करने की क्षमता विकसित नहीं कर पाते हैं। एक और मसला यह है कि अधिकांश सवालों में स्केल गुणक (scale factor) पूर्ण संख्याओं में दिए जाते हैं। जब बच्चों का सामना वास्तविक जीवन की उन समस्याओं से होता है जो इस श्रेणी में नहीं आती हैं, यानी कि जिनमें स्केल गुणक भिन्न संख्याओं में होते हैं, तो वे घबरा जाते हैं। इसलिए दिए गए उदाहरण ऐसे होने चाहिए जो विविध क्षेत्रों को कवर करते हों और जिनमें भिन्नात्मक स्केल गुणक भी शामिल हों।

हालाँकि उच्च कक्षाओं में बच्चों का इस विषय से विभिन्न रूपों में सामना होता है, पर अपने लिए हमें इस बात को दोहराने की आवश्यकता है कि प्रारम्भिक चरण के दौरान हम बच्चों से क्या हासिल करने की अपेक्षा करते हैं।

अपेक्षाएँ

- अनुपातों के भिन्नों से सम्बन्ध को समझें : जहाँ भिन्न भाग की तुलना पूर्ण से करते हैं, वहीं अनुपात भाग-से-भाग और भाग-से-पूर्ण दोनों की तुलना करते हैं।
- अनुपातों को पढ़ने और लिखने में क्रम के महत्त्व को समझें।
- तुल्य अनुपातों (equivalent ratio) की खोजबीन करें व उन्हें बनाएँ।
- यह समझें कि समानुपात गुणात्मक सम्बन्ध पर आधारित है और यह संख्यात्मक सम्बन्ध का सामान्यीकरण करता है, यानी कि यदि a : b $: : c : d$, तब $ad = bc$।
- समानुपातिक और असमानुपातिक सन्दर्भों को पहचानें।
- समानुपातिक सवालों के सम्बन्ध में ऐकिक विधि (unitary method) के उपयोग को समझें।
- दर को विभिन्न इकाइयों वाली दो राशियों (quantity) के अनुपात के रूप में देखें (दर एक विशेष प्रकार का अनुपात है)।
- किसी संख्या को दिए गए अनुपात में विभाजित करें।
- विभिन्न तरीक़ों और आरेखों (diagram) का उपयोग करके समानुपात के सवाल हल करें।

तो, शुरुआत कहाँ से करें?

बच्चों को अनुपात और समानुपात की सहज समझ होती है। इसलिए यहीं से शुरू करना अच्छा हो सकता है। उन्हें अपनी सहज समझ का उपयोग करने दें और फिर उनके द्वारा लागू किए गए सिद्धान्तों पर ध्यान देने, उन सिद्धान्तों का अध्ययन करने, उनके साथ प्रयोग करने और उन्हें स्पष्ट रूप से व्यक्त करने में उनकी मदद करें। 'अध्ययन और प्रयोग' से मेरा क्या आशय है, इसे मैं इस लेख में धीरे-धीरे स्पष्ट करूँगी।

गतिविधियाँ 1 से 5 और खेल 1 का निर्माण इसी सहज समझ के आधार पर किया गया है।

मुख्य शब्द : *अनुपात, समानुपात, भिन्न, भाग-से-भाग, भाग-से-पूर्ण, तुल्य अनुपात, ऐकिक विधि*

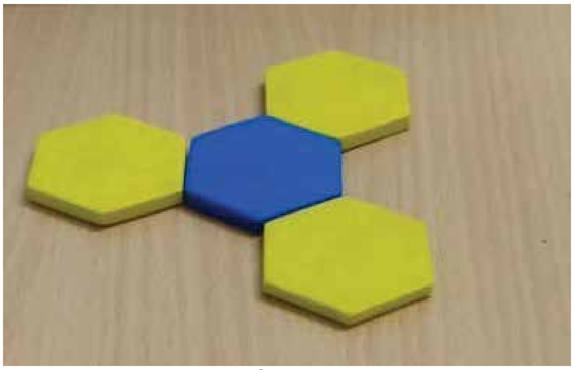
गतिविधि 1

उद्देश्य : दृश्य पहेली (visual poser) के माध्यम से सहज ज्ञान युक्त गुणात्मक सोच को बढ़ाना।

सामग्री : षट्कोण की आकृति के टुकड़े।

बच्चों के लिए **चित्र-1** में दिखाए अनुसार एक डिज़ाइन पैटर्न तैयार करें।

अगर मेरे पास 12 पीले षट्कोण हैं, तो **चित्र-1** के अनुसार डिज़ाइन बनाने के लिए मुझे कितने नीले षट्कोणों की ज़रूरत होगी?



चित्र-1

अगर मेरे पास 6 नीले षट्कोण हैं, तो **चित्र-2** के अनुसार डिज़ाइन बनाने के लिए मुझे कितने भूरे षट्कोणों की ज़रूरत होगी?



चित्र-2

गतिविधि 2

उद्देश्य : बच्चों द्वारा उपयोग की जाने वाली गुणात्मक सोच की ओर ध्यान आकर्षित करना।

बच्चों से कक्षा-कक्ष की स्थिति पर आधारित एक सवाल पूछें। इसका जवाब देने के लिए बच्चों को अपने सहज ज्ञान का उपयोग करने दें।

तन्वी और मौली सवाल हल कर रहे हैं। तन्वी द्वारा हल किए जाने वाले हर दो सवालों पर मौली तीन सवाल हल करती है।

अगर तन्वी ने आठ सवालों को हल किया, तो मौली कितने सवाल हल करेगी?

बच्चों को कुछ मिनटों के लिए इस पर सोचने दें और उन्हें अपने जवाब बताने दें। उन्हें अपने जवाब समझाने के लिए कहें।

कुछ बच्चे सही जवाब 12, दे सकते हैं, लेकिन यह भी सम्भव है कि कुछ बच्चे इसके जवाब में 9 कहें।

'मौली ने नौ (तीन से छह अधिक) सवाल हल किए क्योंकि तन्वी ने आठ (दो से छह अधिक) सवाल हल किए थे।'

अन्य बच्चे इस तरह के तर्क का जवाब कैसे देते हैं? क्या वे तर्क में कोई ग़लती देख पाते हैं?

एक बार जब चर्चा ख़त्म हो जाए तो शिक्षक को 'हर के लिए' शब्दों के महत्त्व को दोहराना चाहिए और फिर बच्चों का ध्यान उनके द्वारा लागू किए गए गुणात्मक तर्क की ओर खींचना चाहिए।

तन्वी द्वारा हल किए गए हर दो सवालों के लिए मौली ने तीन सवाल हल किए। अगर तन्वी ने आठ सवाल हल किए जो 2 का चार गुना है, तो मौली 3 का चार गुना यानी कि 12 सवाल हल करेगी।

गतिविधि 3

उद्देश्य : आवर्धन (enlargement) के माध्यम से समानुपात की सहज समझ विकसित करना।
सामग्री : वर्गाकार बिन्दुकित काग़ज़।

चित्र-3 में दिखाए अनुसार वर्णमाला के किसी एक अक्षर या किसी एक अंक का एक चित्र बनाएँ।

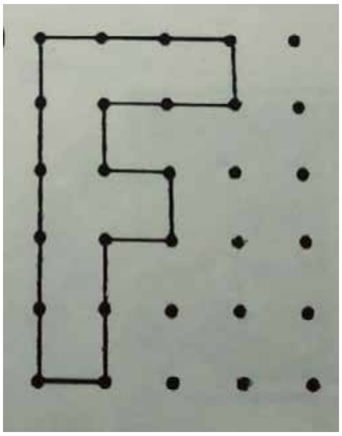
बच्चों से इसे दोगुना करने के लिए कहें। क्या वे इसे सही ढंग से कर पाए?

क्या उन्हें अपनी ड्राइंग सही लगी?

उन्होंने किस तरह की ग़लतियाँ कीं?

उन ग़लतियों का क्या कारण हो सकता है?

उन्हें इस चित्र को तीन गुना बड़ा करने के लिए कहें। क्या उन्हें कोई कठिनाई हुई?



चित्र-3

गतिविधि 4

उद्देश्य : मॉडल बनाने के माध्यम से समानुपात की सहज समझ विकसित करना।
सामग्री : यूनिफ़िक्स घन।

बच्चों को 2 × 2 × 2 आकार के घन दें।

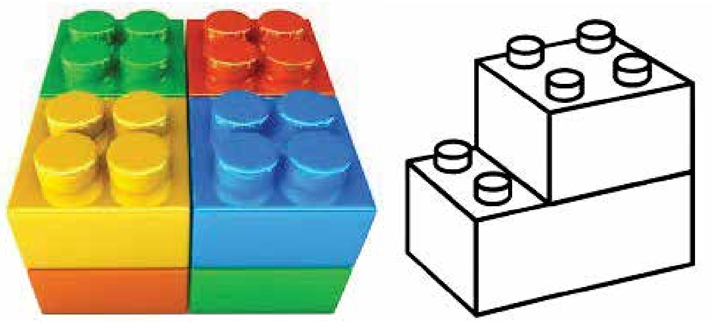
उन्हें इसे दोगुना करने के लिए कहें।

उन्होंने इस सवाल को कैसे हल किया?

उन्हें कितने घन की आवश्यकता होगी? क्या वे किसी विमा को दोगुना करना भूल गए?

बच्चों को इस आकृति को तीन गुना करने के लिए कहें।

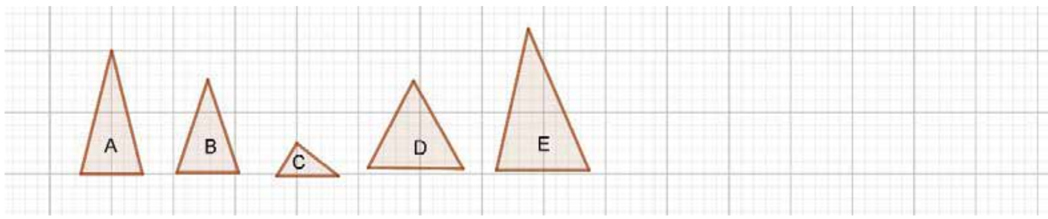
क्या उन्हें यह चुनौतीपूर्ण लगा?



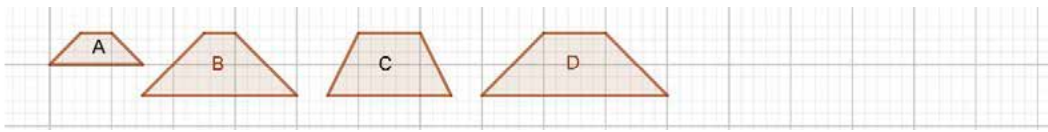
गतिविधि 5

उद्देश्य : समरूप आकृतियों को पहचानना।

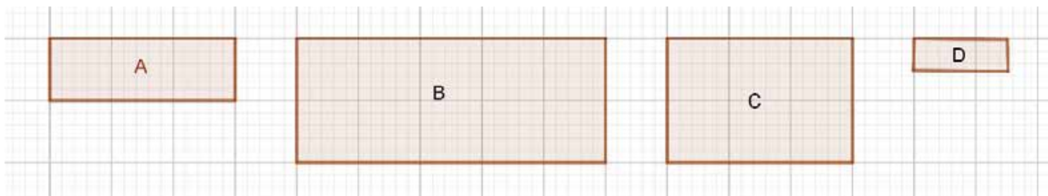
सामग्री : आयतों, समद्विबाहु या समकोण त्रिभुजों और समलम्ब चतुर्भुजों के सेट (प्रत्येक सेट में समरूप आकृतियों की एक जोड़ी होती है)। ध्यान रहे कि हम मापन के उपकरणों के उपयोग की अनुमति नहीं देते हैं।



चित्र-6



चित्र-7



चित्र-8

शिक्षक वर्गाकार जाली वाले काग़ज़ का उपयोग करके और उन्हें सादी कार्डशीट पर चिपकाकर यह सेट तैयार कर सकते हैं। प्रत्येक आकृति को अक्षरों का उपयोग करके नाम दिया जा सकता है। हमें आकारों का चयन करने में सावधानी बरतनी चाहिए, ताकि समरूपता का पता लगाना न तो बहुत आसान हो और न ही बहुत कठिन।

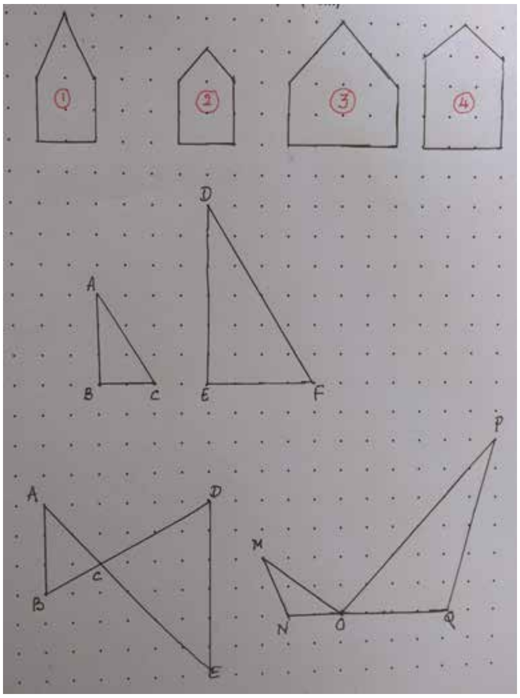
बच्चों को तीन समूहों में विभाजित करें। समूहों को एक समय में एक सेट दें ताकि वे चर्चा कर सकें और उन जोड़ियों का चयन कर सकें जो उन्हें समरूप दिखती हैं। समरूपता के बारे में निर्णय लेने के लिए वे या तो आकृतियों के समतल भाग का या फिर वर्गाकार जाली वाले भाग का उपयोग कर सकते हैं। बारी-बारी से, प्रत्येक समूह तीनों सेटों को देखे और प्रत्येक सेट में समरूप जोड़ियों को नोट करें।

गतिविधि के अन्त में, सभी समूह अपने निष्कर्षों को साझा करें और अपने तर्क प्रस्तुत करें। फिर रूलर का उपयोग करके अपने उत्तर की जाँच करें।

आप यह कहकर इस चुनौती का स्तर ऊँचा रख सकते हैं कि वे केवल आकृतियों के समतल भाग का ही उपयोग करें।

समरूपता की जाँच करने वाली एक वर्कशीट के ज़रिए आप कक्षा में इसका अनुवर्तन (follow up) करा सकते हैं।

क्या प्रत्येक सेट में समरूप आकृतियाँ हैं?



चित्र-9

खेल 1

उद्देश्य : अनुपातों की तुल्यता का पता लगाना और उनके समूह बनाना।
सामग्री : तुल्य अनुपातों को प्रदर्शित करने के लिए उपयुक्त चित्रों वाले 16 कार्ड (उदाहरण के लिए, 3:1, 1:4, 3:4 और 2:3 के चार तुल्य अनुपात)।

यहाँ 1:2 के तुल्य अनुपातों के दो चित्र दिए गए हैं।



चित्र-10



चित्र-10.1



चित्र-10.2

कक्षा को दो टीमों में विभाजित करें। प्रत्येक टीम को, एक के बाद एक, कार्डों को छाँटने और उनके समूह बनाने के लिए कहें। यदि वे चार सेटों को सही ढंग से समूहित करने का काम कर लेते हैं, तो उन्हें चार अंक मिलेंगे।

विश्लेषण करें कि उन्होंने उन्हें कैसे समूहित किया है। बच्चों से उनके समूहित करने का आधार पूछें।

क्या सभी बच्चे समूह बनाने के पीछे के तर्क से सहमत हैं?

गतिविधि 6

उद्देश्य : यह बताना कि अनुपात क्या है और यह दर्शाना कि हम अनुपात को कैसे पढ़ते और लिखते हैं।
सामग्री : कक्षा-कक्ष।

कक्षा-कक्ष में फर्नीचर की जमावट की ओर बच्चों का ध्यान आकर्षित करें।



चित्र-11

इस चित्र में, प्रत्येक टेबल के साथ दो स्टूल हैं।

टेबल का स्टूलों से अनुपात 1:2 है।

बच्चों को सिखाएँ कि कैसे शब्दों का क्रम अनुपात को लिखने के हमारे तरीक़े को प्रभावित करता है। उदाहरण के लिए, इस चित्र में स्टूलों का टेबल से अनुपात 2:1 है।

बच्चों को अनुपात का उपयोग करके इस घन के डिज़ाइन का वर्णन करने के लिए कहें।

काले घनों की संख्या का भूरे घनों की संख्या से अनुपात क्या है?

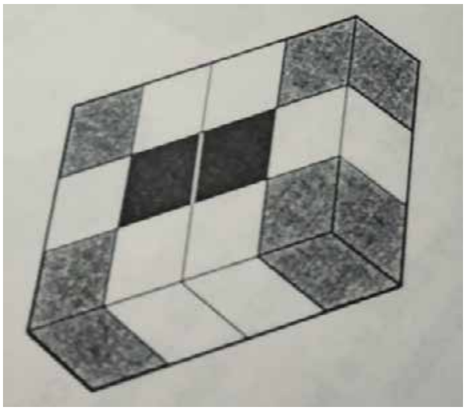
काले घनों की तुलना सफ़ेद घनों से कैसे की जा सकती है?

क्या बच्चे गुणात्मक सोच का उपयोग कर पाए?

वे अपने निष्कर्षों को वाक्यों में दर्ज कर सकते हैं।

_____ घनों की संख्या _____ घनों की संख्या की दोगुनी है।

दूसरे चरण के रूप में, वे इसे अनुपात के विवरणों के रूप में लिख सकते हैं।



चित्र-12

गतिविधि 7

उद्देश्य : किसी दिए गए अनुपात का अध्ययन करना और उसके साथ प्रयोग करना।
सामग्री : घन या काउंटर।

यहाँ 2 पीले घन और 4 काले घन दिए गए हैं।

पीले घनों की संख्या का काले घनों की संख्या से अनुपात 2:4 है।

काले घनों की संख्या पीले घनों की संख्या की 2 गुनी है।

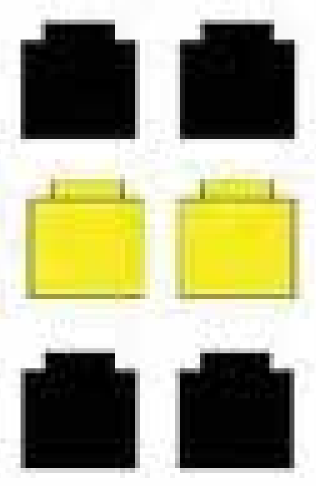
यदि तुम प्रत्येक रंग के 2 घनों को इसमें जोड़ो, तो क्या अभी भी काले घनों की संख्या पीले घनों की संख्या की 2 गुनी होगी? पीले घनों की संख्या का काले घनों की संख्या से नया अनुपात क्या होगा?

यदि तुम मूल पैटर्न से प्रत्येक रंग का 1 घन निकाल लो, तो क्या होगा? अब पीले घनों की संख्या का काले घनों की संख्या से नया अनुपात क्या होगा?

प्रत्येक रंग के घनों की संख्या को दोगुना करने पर क्या होगा? तब पीले घनों की संख्या का काले घनों की संख्या से नया अनुपात क्या होगा?

प्रत्येक रंग के घनों की संख्या को आधा करने पर क्या होगा? पीले घनों की संख्या का काले घनों की संख्या से नया अनुपात क्या होगा?

क्या बच्चे इस प्रयोग के आधार पर कोई निष्कर्ष निकाल सकते हैं?



चित्र-13

गतिविधि 8

उद्देश्य : तुल्य अनुपातों को बनाकर अनुपात के गुणात्मक सम्बन्धों की खोजबीन करना।
सामग्री : वर्गाकार जाली वाला काग़ज़।

शिक्षक को बच्चों को भिन्नों से अनुपातों के सम्बन्ध के बारे में बताना चाहिए। उन्हें इन दोनों के बीच के अन्तरों की ओर बच्चों का ध्यान खींचना चाहिए। हो सकता है कि इससे पहले बच्चे यह बात नहीं जानते हों कि हर भिन्न वास्तव में एक अनुपात ही है।

भिन्नों का अध्ययन करते समय हम भाग की तुलना पूर्ण से करते हैं, लेकिन अनुपातों का अध्ययन करते समय हम भाग-से-भाग और भाग-से-पूर्ण दोनों की तुलना करते हैं।

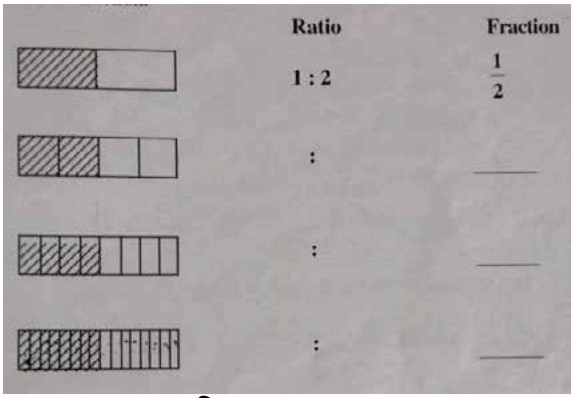
साथ ही भिन्नों के मामले में वह क्रम निश्चित होता है जिसमें हम संख्याओं को लिखते हैं। भिन्नों में अंश की संख्या भागों की संख्या को बताती है और हर की संख्या पूर्ण की संख्या को। पर अनुपात के मामले में ऐसा कोई निश्चित क्रम नहीं है।

शिक्षक तुल्य भिन्नों और तुल्य अनुपातों के बीच के घनिष्ठ सम्बन्ध को चित्रों की मदद से दिखा सकते हैं।

यह चित्र पूर्ण-से-भाग के अनुपात को दर्शाता है।

बच्चों को भिन्न और अनुपात के सम्बन्धों को आत्मसात करने के लिए चित्र में दर्शाए अनुसार अपने काम को दर्ज करना चाहिए।

बच्चों को यह भी समझने की ज़रूरत है कि सरलतम रूप बनाने के लिए हम भिन्नों की तरह ही राशियों के उभयनिष्ठ गुणनखण्डों के ज़रिए अनुपात को कम कर सकते हैं।



चित्र-14

उदाहरण : 4:12 को दोनों तरफ़ 4 से विभाजित किया जा सकता है और इससे हमें 1:3 सरल रूप मिलेगा।

8:10 को दोनों तरफ़ 2 से भाग देकर सरल रूप 4:5 प्राप्त किया जा सकता है।

इस अन्तर को और स्पष्ट करने के लिए एक ही सन्दर्भ में पूर्ण-से-भाग और भाग-से-भाग के अनुपात पर चर्चा करें।

एक क्लास में 18 लड़के और 12 लड़कियाँ हैं।

लड़कों का लड़कियों से अनुपात 18:12 या 3:2 है। यह भाग-से-भाग का अनुपात है।

बच्चों की कुल संख्या से लड़कों का अनुपात 18:30 या 3:5 है। यह पूर्ण-से-भाग का अनुपात है।

गतिविधि 9

उद्देश्य : यह दर्शाना कि समानुपात गुणात्मक सम्बन्ध पर आधारित होता है और संख्यात्मक सम्बन्ध का सामान्यीकरण करता है।
सामग्री : 3:1, 1:4, 3:4 और 2:3 के तुल्य अनुपात लिखे हुए 5 अलग-अलग कार्ड।

कार्डों को बच्चों को वितरित करें। उन्हें अनुपात कार्ड छाँटने और उनके समूह बनाने के लिए कहें। निरीक्षण के माध्यम से वे तुल्य अनुपातों का पता लगा लेंगे और उन्हें समूहित कर लेंगे। जाँचें कि वे सही कर रहे हैं या नहीं।

शिक्षक अब अनुपातों के प्रत्येक समूह के भीतर के गुणात्मक सम्बन्ध की ओर उनका ध्यान आकर्षित कर सकते हैं। समझा सकते हैं कि समानुपात का क्या अर्थ है और इस बात की ओर उनका ध्यान खींच सकते हैं कि प्रत्येक समूह में अनुपात समानुपात में हैं।

बच्चों से पूछें : “यदि हम कोई भी दो अनुपात लें जो समानुपात में हों, तो संख्याएँ एक-दूसरे से कैसे सम्बन्धित हैं? माना कि 6:8 और 15:20 समानुपात में हैं।” एक स्पष्ट सम्बन्ध यह है कि हम दोनों जोड़ियों को एक समान अनुपात में कम कर सकते हैं। क्या इसके अलावा कोई और सम्बन्ध भी है? यदि हम उन्हें भिन्न के रूप में लिखें तो क्या हम उनमें कोई सम्बन्ध देख सकते हैं? यह देखने में बच्चों की मदद करें कि 20 का 6

गुना, 15 के 8 गुना के बराबर है। उनसे पूछें कि क्या समानुपात में अनुपातों की प्रत्येक जोड़ी के साथ ऐसा होता है।

चर्चा के माध्यम से शिक्षक इस प्रक्रिया का सामान्यीकरण कर सकते हैं, यानी कि जब-$a{:}b{::}c{:}d$ हो, तो $ad = bc$।

इसके बाद कक्षा में समानुपात से जुड़े व्यावहारिक उदाहरणों पर चर्चा की जा सकती है, मसलन खाना पकाने की विधि, दिल की धड़कन, दौड़ जैसे शारीरिक व्यायाम।

हालाँकि, इसके साथ ही शिक्षक को बच्चों को असमानुपातिक सन्दर्भों से भी अवगत कराना चाहिए ताकि वे समानुपातिक और असमानुपातिक सन्दर्भों को पहचान सकें व उनके बीच अन्तर कर सकें।

असमानुपातिक सन्दर्भ का एक सरल उदाहरण दो लोगों की उम्र की तुलना करना है।

आरव 12 साल का है। उसकी बहन एमी 6 साल की है। इन संख्याओं की तुलना कैसे करें? आरव, एमी की उम्र से दुगनी उम्र का है। 6 साल बाद क्या होगा? क्या तब आरव एमी से दुगनी उम्र का होगा?

मैं इतनी बड़ी कब होऊँगी! मेरे पिताजी की उम्र मेरी उम्र की चार गुना है। उनकी उम्र मेरी उम्र से तीन गुना कब होगी? उनकी उम्र मेरी उम्र से दो गुना कब होगी? मैं उनके बराबर कब हो सकूँगी?

एक दिलचस्प खोजबीन यह जाँचना होगा कि बेटी और पिता के बड़े होने के साथ-साथ स्केल गुणक कैसे व्यवहार करता है। क्या बच्चे यह देख पाते हैं कि ऐसा क्यों होता है?

विचार करें : अब बच्चे किस तरह की पूछताछ कर सकते हैं? शिक्षक बच्चों के लिए क्या काम निर्धारित कर सकते हैं?

गतिविधि 10

उद्देश्य : समानुपातिक सवालों के सम्बन्ध में ऐकिक विधि के उपयोग को समझना।
सामग्री : सामानों, खाद्य पदार्थों आदि की मूल्य सूची।

ऐकिक विधि यानी प्रति इकाई की गणना करना समानुपात के सवालों को हल करने का एक बहुत ही सामान्य तरीक़ा है। कई बच्चों को यह स्वाभाविक और आसानी से समझ में आने वाला लगता है और वे इसे बिना किसी कठिनाई के अपना लेते हैं।

उदाहरण : 3 चॉकलेट बार की क़ीमत 45 रुपए है। तो 7 चॉकलेट बार की क़ीमत कितनी होगी?

वे इस तरह से इसका पता लगा सकते हैं कि यदि 3 चॉकलेट बार की क़ीमत 45 रुपए है, तो 1 चॉकलेट बार की क़ीमत होगी 15 रुपए। इसलिए 7 चॉकलेट बार की क़ीमत 105 रुपए होगी।

इसे इस तरह से हल करना उचित और प्रभावी लगता है।

पर क्या ऐकिक विधि हमेशा सबसे अच्छा तरीक़ा है?

यदि 500 गुब्बारों की क़ीमत 2745 रुपए हो, तो 800 गुब्बारों की क़ीमत क्या होगी?

तीन चॉकलेट बार की क़ीमत से एक चॉकलेट बार की क़ीमत निकालना पूर्णत: व्यावहारिक लगता है, लेकिन 500 गुब्बारों की क़ीमत से एक गुब्बारे की क़ीमत का पता लगाना व्यावहारिक नहीं लगता। यहाँ एक अधिक व्यावहारिक तरीक़ा यह होगा कि 100 गुब्बारों की क़ीमत निकाली जाए और उसे 8 से गुणा किया जाए।

स्पष्ट है कि हमें स्थिति के अनुसार ऐकिक विधि को संशोधित करने की आवश्यकता है।



चित्र-15

गतिविधि 11

उद्देश्य : सवालों को हल करने में सहायता **(मॉडल बनाना)** करना।
सामग्री : वर्गाकार बिन्दुकित काग़ज़।

प्रारम्भिक चरणों में, शिक्षक दृश्यों के साथ सवाल दे सकते हैं।

दूसरे चरण में, बच्चे किसी दिए गए सवाल के लिए मॉडल बना सकते हैं।

इबारती सवालों को हल करने के लिए मॉडल बनाना एक महत्त्वपूर्ण उपकरण है।

उदाहरण : एक कक्षा में लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से अनुपात 2:3 है। यदि कक्षा में बच्चों की कुल संख्या 30 है तो लड़कों की संख्या क्या होगी? लड़कियों की संख्या क्या होगी?

इस सवाल के लिए मॉडल बनाने का एक तरीक़ा यहाँ दिया गया है।

हर 2 लड़कियों पर कक्षा में 3 लड़के हैं।

ऐसे प्रत्येक समूह में 5 बच्चे होंगे।

30 बच्चों में 5 बच्चों के ऐसे कितने समूह होंगे?

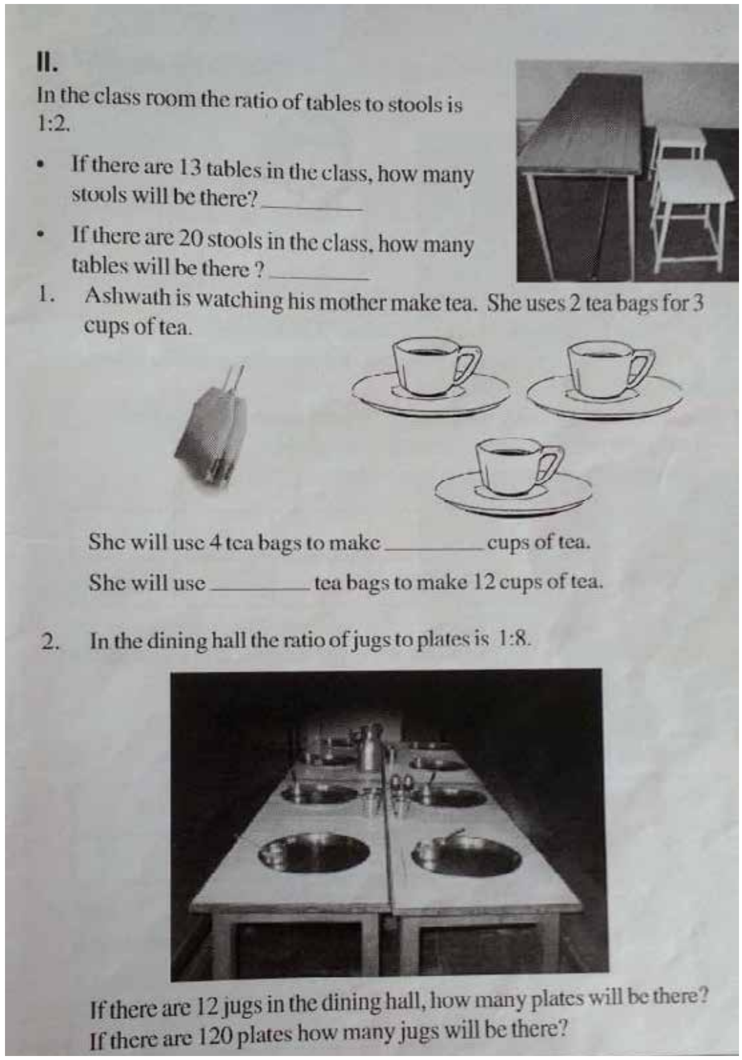
ऐसे 6 समूह होंगे।

इसलिए, ऐसे 6 समूहों में लड़कियों की संख्या 12 और लड़कों की संख्या 18 होगी ।

विचारार्थ : सवालों को हल करते समय एक महत्त्वपूर्ण बात यह है कि *किसी सवाल को समझने के लिए बच्चे किस तरह की कल्पना (imagery) का उपयोग करते हैं?*

क्या हम कल्पना करना सिखा सकते हैं? क्या कल्पना करना एक व्यक्तिपरक अनुभव नहीं है जिसे बयाँ करना मुश्किल हो सकता है?

इसके विपरीत, बच्चों को अपनी स्वयं की कल्पना खोजने में मदद करने के लिए यह आवश्यक है कि शिक्षक दृश्य सामग्री और समस्या समाधान की विविध रणनीतियों व दृष्टिकोणों से उन्हें अवगत कराएँ। कल्पना अक्सर किसी अवधारणा के विकसित होने के तरीक़े से निकटता से जुड़ी होती है। इसके बिना अनुपातों को सरल करना या समानुपातों को खोजना अत्यधिक यांत्रिक काम हो सकता है।



II.
In the class room the ratio of tables to stools is 1:2.

- If there are 13 tables in the class, how many stools will be there? ________
- If there are 20 stools in the class, how many tables will be there ? ________

1. Ashwath is watching his mother make tea. She uses 2 tea bags for 3 cups of tea.

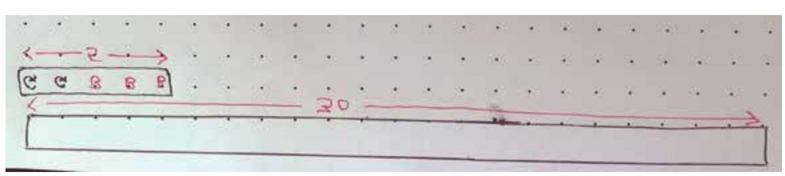
She will use 4 tea bags to make ________ cups of tea.

She will use ________ tea bags to make 12 cups of tea.

2. In the dining hall the ratio of jugs to plates is 1:8.

If there are 12 jugs in the dining hall, how many plates will be there?
If there are 120 plates how many jugs will be there?

चित्र-16



चित्र-17

गतिविधि 12

उद्देश्य : सवालों को हल करने में सहायता (**अलग ढंग से व्यक्त**) करना।

अनुपात के सवालों को हल करने में मदद करने का एक और महत्वपूर्ण तरीक़ा सवाल को अनुपात की भाषा में एक अलग ढंग से व्यक्त करने (rephrasing) की क्षमता है। 'अनुपात की भाषा' क्या है? इसमें इस तरह के वाक्यांशों और शब्दों का उपयोग शामिल होता है, जैसे कि 'प्रत्येक के लिए', 'हर के लिए', 'प्रति', 'प्रत्येक समय' इत्यादि।

शुरुआत में, बच्चों के लिए अनुपात की भाषा में किसी सवाल की जानकारी को फिर से लिखना अच्छा अभ्यास है।

सवालों को अलग ढंग से व्यक्त करने में बच्चों की मदद करें।

उदाहरण : एक आइसक्रीम की दुकान पर बेचे गए चॉकलेट कोन की संख्या का वैनिला कोन की संख्या से अनुपात 4:3 था। अगर दुकानदार ने एक दिन में 84 आइसक्रीम कोन बेचे, तो उसने कितने चॉकलेट कोन बेचे?

प्रत्येक 4 चॉकलेट कोन पर 3 वैनिला कोन बेचे गए।

इस तरह 7 वस्तुओं का एक समूह बना।

84 में 7 के कितने समूह होंगे? ऐसे 12 समूह होंगे।

इसलिए, चॉकलेट कोन की संख्या 4 का 12 गुना यानी, 48 होगी।

गणित लेखन

बच्चों को हल के लिए अपने तर्कों को लिखने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए।

उदाहरण : कक्षा के एक-चौथाई बच्चे आज अनुपस्थित हैं। 30 बच्चे आज उपस्थित हैं। इस कक्षा में कुल कितने बच्चे दर्ज हैं?

"यदि कक्षा के एक-चौथाई बच्चे अनुपस्थित हैं, तो तीन-चौथाई बच्चे कक्षा में मौजूद हैं। दिया गया है कि 30 बच्चे उपस्थित हैं यानी यहाँ तीन-चौथाई का मतलब हुआ 30 बच्चे। इसलिए, एक-चौथाई का मतलब हुआ 10 बच्चे। इसलिए कक्षा में बच्चों की कुल संख्या 40 है।"

गतिविधि 13

उद्देश्य : सवालों को हल करने में सहायता (**तालिका बनाना**) करना।

एक पुस्तकालय में, ग़ैर-कथा साहित्य पुस्तकों की संख्या कथा साहित्य पुस्तकों की संख्या की एक-चौथाई है।

यदि पुस्तकालय में ग़ैर-कथा साहित्य पुस्तकों की संख्या 50 है तो कथा साहित्य पुस्तकों की संख्या कितनी होगी?

यदि कथा साहित्य पुस्तकों की संख्या 120 है तो ग़ैर-कथा साहित्य पुस्तकों की संख्या कितनी होगी?

ग़ैर-कथा साहित्य	20		50		100
कथा साहित्य	80	240		120	

चित्र-18

इन सवालों को हल करने के लिए आप किन तरीक़ों का इस्तेमाल करेंगे?

एलिज़ाबेथ आंटी अपने भतीजे और भतीजी के बीच बाँटने के लिए 1500 रुपए देना चाहती हैं। भतीजी बड़ी है, इसलिए वह तय करती हैं कि उन्हें भतीजी और भतीजे के बीच 5:3 के अनुपात में रुपए बाँटना चाहिए। प्रत्येक बच्चे को कितने रुपए मिलेंगे?

जलील द्वारा तय की गई हर 4 किलोमीटर की दूरी के लिए कियान द्वारा 3 किलोमीटर की दूरी तय की गई। यदि जलील ने 1 किलोमीटर दूरी तय की, तो कियान ने कितनी दूर तय की होगी?

एक बच्चे ने गृहकार्य में दिए गए सवालों में से 8 सवालों को कक्षा में हल कर लिया। यदि हल किए गए सवालों का बचे हुए सवालों से अनुपात 4:1 हो, तो गृहकार्य के लिए कुल कितने सवाल दिए गए थे?

कभी-कभी बच्चों को **खुले प्रश्न (open-ended question)** भी दें।

सोचने के लिए

दो सम संख्याओं का अनुपात 3:7 है। संख्याएँ क्या हैं?

1 अण्डे को उबालने में 3 मिनट का समय लगता है। 2 अण्डे उबालने में कितने मिनट लगेंगे?

खेल 2

उद्देश्य : दिए गए अनुपात को समझना और उसके लिए एक व्यावहारिक डिज़ाइन बनाना।

सामग्री : 5 × 5 की वर्गाकार ग्रिड। 4 अलग-अलग रंगों की 25 टाइलें।

शिक्षक एक डिज़ाइन बनाएँ और अनुपात का उपयोग करके उसे बच्चों के साथ साझा करें ।

उदाहरण :

हरे रंग का लाल रंग से अनुपात 5:4 है।

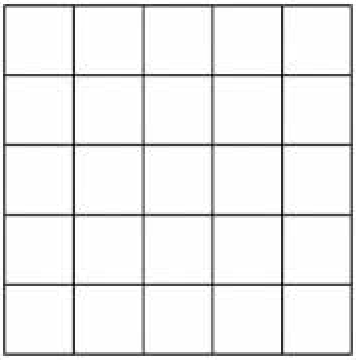
हरे रंग का नीले रंग से अनुपात 10:1 है।

लाल रंग का पीले रंग से अनुपात 4:3 है।

इस पैटर्न में दो सममित रेखाएँ हैं।

क्या बच्चे एक ऐसा डिज़ाइन बनाने में सक्षम हैं जो इन सभी शर्तों को सन्तुष्ट करता हो?

इस खेल को कुछ बार खेलने के बाद बच्चे टीम बना सकते हैं और एक-दूसरे के लिए सवाल निर्मित कर सकते हैं।



चित्र-19

एक ऐसा पैटर्न बनाना जो अच्छे सुरागों के लिए उपयुक्त हो, अपने आप में एक शिक्षाप्रद और चुनौतीपूर्ण अनुभव है, ख़ासकर यदि उसका उत्तर अद्वितीय हो।

विस्तार : हम 4 × 4 आकार की ग्रिड भी उपयोग कर सकते हैं।

गतिविधि 14

उद्देश्य : अनुपात के अनुप्रयोगों (किसी एटलस के नक़्शे) का अध्ययन करना।
सामग्री : एटलस या नक़्शा चार्ट।

नक़्शा पढ़ने और नक़्शे में जिस तरह पैमाने का उपयोग किया जाता है, जिस तरह नक़्शे पर पैमाने को दर्शाया जाता है और नक़्शे पर निरूपण में सटीकता की आवश्यकता को देखने में शिक्षक बच्चों की मदद कर सकते हैं।

बच्चे स्थानों की जोड़ियों के बीच की दूरी और नदियों की लम्बाई का अनुमान लगाने के लिए अपने ज्ञान का इस्तेमाल कर सकते हैं। वे भारत के विभिन्न राज्यों के समुद्र तटों की लम्बाई की तुलना भी कर सकते हैं इत्यादि।

गतिविधि 15

उद्देश्य : वास्तविक जीवन से जुड़ी अनुपात की समस्याओं (स्केल ड्राइंग) का सामना करना।
सामग्री : मापने वाली टेप और स्केल।

हर बार जब शिक्षक ब्लैकबोर्ड पर कोई चित्र बनाते हैं या ब्लैकबोर्ड पर कुछ लिखते हैं, तो वह परोक्ष रूप से अनुपात का उपयोग करते हैं। 20 सेंटीमीटर लम्बी एक पेंसिल जब बोर्ड पर बनाई जाती है तो वह 30 सेंटीमीटर लम्बी हो सकती है।

यह 1½ स्केल गुणक द्वारा ***आवर्धन*** या गुणन का एक उदाहरण है।

इसके विपरीत, नक़्शे और स्केल ड्राइंग के चित्र पैमाने में कमी को दर्शाते हैं।

बच्चों को समूहों में विभाजित करें और प्रत्येक समूह को कक्षा, पुस्तकालय या खेल के मैदान की स्केल ड्राइंग बनाने के लिए कहें।

चर्चा करें कि उपयोग करने के लिए एक उपयुक्त पैमाना क्या होगा।

स्केल ड्राइंग बनाने की प्रक्रिया में वे भिन्नात्मक अनुपातों का सामना करेंगे और कई बार उन्हें इसका सन्निकटन करने की आवश्यकता होगी।

गतिविधि 16

उद्देश्य : अनुपात में एक उभयनिष्ठ इकाई या रूपान्तरण की आवश्यकता को स्पष्ट करना।

उदाहरण : मधु कहती है, "मुझे अपना प्रोजेक्ट पूरा करने में 10 दिन लगेंगे।" विशाल कहता है, "मुझे 2 सप्ताह लगेंगे।"

अशोक ने मधु और विशाल द्वारा लगने वाले समय के अनुपात को 10:2 बताया।

बच्चों से पूछें कि उन्हें क्या लगता है?

बच्चों को इस सन्दर्भ में 10:2 अनुपात के निहितार्थ पर चर्चा करने दें।

यदि यह ग़लत है, तो ग़लत क्यों है? इसे व्यक्त करने का सही तरीक़ा क्या है?

गतिविधि 17

उद्देश्य : विभिन्न इकाइयों वाली दो राशियों के अनुपात के रूप में दर को देखना (दर एक विशेष प्रकार का अनुपात है)।
सामग्री : मूल्य सूची, ख़रीदी के बिल, बिजली बिल, यात्रा में लगने वाला समय।

दर क्या है? दर विभिन्न प्रकार के मापों की तुलना करती है, जैसे रुपए प्रति किलोग्राम (ख़रीदी गई वस्तु की प्रति इकाई क़ीमत), किलोमीटर प्रति घण्टा (वाहन की गति), रुपए प्रति दिन (एक श्रमिक की मज़दूरी), प्रति मिनट दिल की धड़कन (स्वास्थ्य की स्थिति)। हमारे जीवन के कई पहलुओं में किसी-न-किसी प्रकार की दर शामिल है।

दिखाए अनुसार तालिका में दर का आलेखन (plotting) गुणात्मक सम्बन्ध को स्पष्ट रूप से दर्शाता है।

हम इस डेटा को ग्राफ़ के रूप में भी दिखा सकते हैं।

समय (घण्टे में)	1	2	3	4	5
दूरी (मील में)	60	120	180	240	300

चित्र-20

गतिविधि 18

उद्देश्य : वास्तविक जीवन में अनुपात से जुड़ी समस्याओं (खाना पकाने की विधियों से सम्बन्धित) का सामना करना।
सामग्री : ख़ाना पकाने की विधियाँ।

अनुपातों पर की गई कोई भी चर्चा खाना पकाने की विधियों, जिन पर हमारा अस्तित्व टिका है, में अनुपातों के उपयोग पर चर्चा किए बिना समाप्त नहीं हो सकती।

कड़क कॉफ़ी? हल्की कॉफी?

शिक्षक कॉफी बनाने की चार विधियों का वितरण कर सकते हैं। बच्चों को कॉफी के कड़कपन के अनुसार उन्हें व्यवस्थित करना होगा।

यदि कॉफी के साथ असुविधा हो, तो आप इसकी जगह सन्तरे का शरबत भी ले सकते हैं।

चार विधियों का क्रम तय करने के लिए चार अलग-अलग राशियों की तुलना की आवश्यकता होती है।

हालाँकि, हम खाना पकाने की किसी विधि के भीतर भी तुलना भी कर सकते हैं।

इसका एक उदाहरण यहाँ दिया गया है।

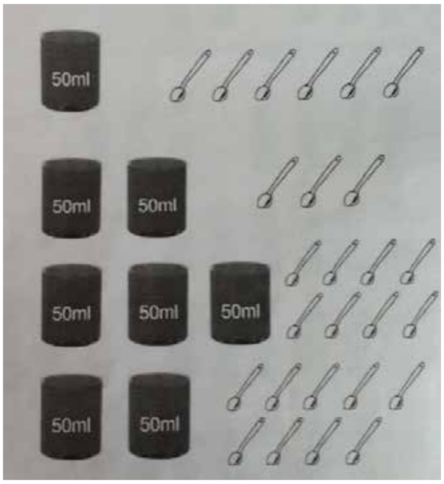
एक विधि के भीतर रस और पानी की मात्रा के बीच तुलना।

सन्तरे का 1 जग शरबत बनाने के लिए मैं दो गिलास सन्तरे का रस और पाँच गिलास पानी का उपयोग करती हूँ।

यदि मैं एक और गिलास पानी इसमें मिलाऊँ तो घोल के गाढ़ेपन का क्या होगा?

यदि मैं एक और गिलास सन्तरे का रस जोड़ूँ तो क्या होगा?

यदि मैं प्रत्येक का एक गिलास जोड़ दूँ तो क्या होगा, यदि प्रत्येक का 2 गिलास जोड़ दूँ तो क्या होगा?



चित्र-21

गतिविधि 19

उद्देश्य : समानुपात के सवालों को बीजगणितीय समीकरणों के रूप में हल करना।
सामग्री : इबारती सवाल।

एक थैले में लाल और हरे रंग की कुछ कैंडी हैं। लाल कैंडी का हरी कैंडी से अनुपात 3:4 है। यदि बैग में 120 हरी कैंडी हों, तो लाल कैंडी कितनी होंगी?

हर 3 लाल कैंडी के लिए 4 हरी कैंडी हैं।

लाल कैंडी की संख्या = y

हरी कैंडी की संख्या = 120

इसलिए, $3:4::y:120$

$3 \times 120 = 4 \times y$

$4y = 360$

$y = 90$

प्रोजेक्ट के लिए सुझाव

- छाया का अध्ययन
- खेलों के आँकड़े
- मानव शरीर (तुलनात्मक अध्ययन)
- मुद्रा विनिमय दर
- सूक्ष्मदर्शी आवर्धन

इतिहास : मूल रूप से इस सवाल को प्राचीन यूनानियों ने पेश किया था :

'किसी रेखा को दो भागों में इस तरह से कैसे विभाजित किया जा सकता है कि बड़े भाग का छोटे भाग से अनुपात, पूरी रेखा के बड़े भाग से अनुपात के समान हो?'

ऐतिहासिक रूप से, लोगों ने किस तरह की अनुपात समस्याओं का अध्ययन किया? उन्हें किन चुनौतियों का सामना करना पड़ा जिसके कारण त्रिकोणमिति जैसे विषयों का विकास हुआ? इस प्रश्न का अध्ययन करना बच्चों और शिक्षकों के लिए रुचिपूर्ण होगा।

समापन से पहले कुछ सवाल...

- आप सीखने में बच्चों की मदद कैसे करते हैं? उनके सीखने को सम्बलन कैसे देते हैं?
- क्या आपने बच्चों को विभिन्न तरीक़ों से अवगत कराया है ताकि आप अभीष्ट लक्ष्यों या सीखने के परिणामों को प्राप्त कर सकें?
- क्या ग़लत हलों का अध्ययन करके आप बच्चों की ग़लतफ़हमियों को समझ सकते हैं और उन्हें दूर कर सकते हैं?



पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली वर्तमान में सह्याद्रि स्कूल (KFI) की प्राचार्या हैं। ऋषि वैली और सह्याद्रि स्कूल में स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर की सदस्य हैं। 1990 के दशक में, उन्होंने चेन्नई के प्रसिद्ध गणित-शिक्षक स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ काम किया। वे ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलिमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम 'स्कूल इन ए बॉक्स' की टीम का हिस्सा रही हैं। पद्मप्रिया से *padmapriya.shirali@gmail.com* पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय तथा कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेंटर, ऋषि वैली की संयुक्त पत्रिका Azim Premji University's At Right Angles (a resource for school mathematics) जुलाई 2019 में प्रकाशित Ratio का हिन्दी अनुवाद है।

अनुवाद : निदेश सोनी

पुनरीक्षण एवं कॉपी एडीटिंग : कविता तिवारी **सम्पादन :** राजेश उत्साही